On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
c. Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
(On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.)

4. **a.** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

5. **a.** En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.
b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.