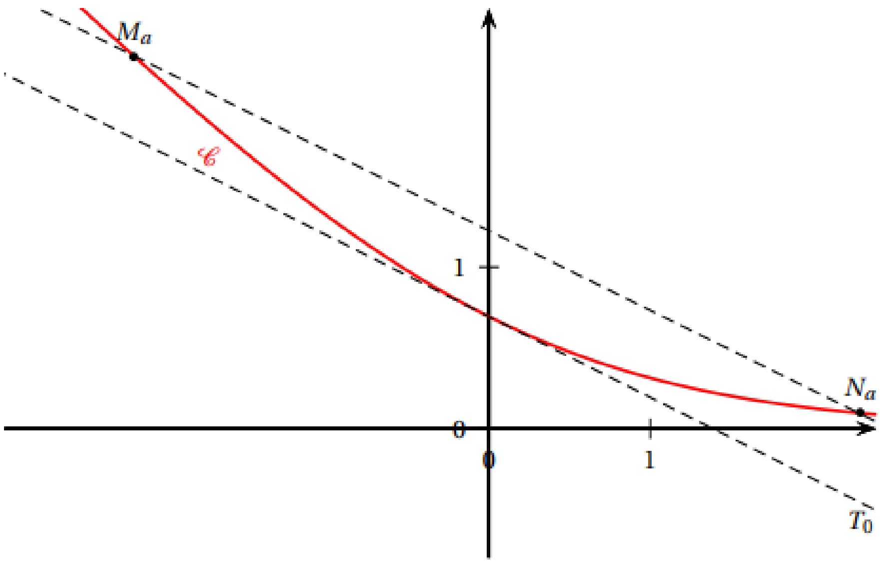
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous.



1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

   c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1+e^x}$.
   d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

   a. Déterminer une équation de la tangente T_0.
   b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a.
   On a donc : $M_a\left(-a\,;\,f(-a)\right)$ et $N_a\left(a\,;\,f(a)\right)$.

   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.
   b. En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.