Exercice 3) (d'après bac C, Paris, 1990, 10 points)

f est la fonction définie sur]0 , +∞ [par $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$.

1) Montrer que l'on a, pour tout réel *x* de]0 , +∞ [, $f'(x) = \dfrac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$.
2) La fonction φ est définie sur]0 , +∞ [par $\varphi(x) = x+1+\ln x$. Etudier ses variations, en déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β.
   Etudier le signe de φ.
3) En déduire les variations de *f*, étudier les limites de *f* en 0 et+∞
4) Montrer que, pour tout entier strictement positif *n*, l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique que l'on notera α_n. On cherche maintenant à étudier la suite (α_n).
5) Montrer que, pour tout entier *n* > 0, $f(e^n) < n$. En déduire que $\alpha_n > e^n$ et la limite de (α_n)
6) Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut se mettre sous la forme $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$. En déduire la limite de $\dfrac{\alpha_n}{e^n}$.