TS **LOGARITHME** feuille 24

Problème (

<u>Question préliminaire</u> : *k* désignant un nombre réel, on appelle *g* la fonction définie sur]0 ; +⑥[par $g(x) = x(\ln x)^2 + kx$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ (pour cette dernière on pourra poser $x = \dfrac{1}{t^2}$).

On considère dans toute la suite la fonction f_k définie sur [0 ; 1] par $f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx$ si $x > 0$, et $f_k(0) = 0$. On note ☜$_k$ la courbe représentative de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 10cm. On note *I*, *J*, *L* les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1) et (1 ; 1).

Première partie

Etude des fonctions f_k.

<u>A : Etude et représentation de f_0.</u>

Dans cette question, $k = 0$.

1) Signe de la dérivée
   a) Calculer la dérivée f_0' de f_0 sur]0 ; 1] et montrer que pour tout *x* appartenant à]0 ; 1] on a $f_0'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.
   b) Déterminer les solutions de l'équation $f_0'(x) = 0$ sur]0 ; 1]
   c) Etudier le signe de $f_0'(x)$ sur]0 ; 1]
2) Etude à l'origine

   Déterminer la limite de $\dfrac{f_0(x)}{x}$ quand *x* tend vers 0. f_0 est-elle dérivable en 0 ? Donner une équation de la tangente en *O* à la courbe ☜$_0$.
3) Tracé de la courbe ☜$_0$.
   a) Dresser le tableau des variations de f_0.
   b) Tracer ☜$_0$.

B : Etude de f_k.

1) Dérivée de f_k.
   a) Calculer $f_k'(x)$ sur]0 ; 1]
   b) Soit A_k le point de $\mathcal{C}_k$ d'abscisse 1. Montrer que la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ au point A_k est la droite (OA_k)
   c) Déterminer la tangente à $\mathcal{C}_k$ en O.

On ne demande pas d'étudier les variations de f_k.

2) Etude de f_1.
   a) Prouver que pour tout $x \in$]0 ; 1], $f_1'(x) = (1 + \ln x)^2$
   b) Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
   c) Etablir le tableau de variation de f_1 et tracer $\mathcal{C}_1$ sur le même graphique que $\mathcal{C}_0$ en précisant le coefficient directeur de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_1$ au point A_1.
3) Etude de $f_{\frac{1}{2}}$.
   a) Prouver que pour tout $x \in$ [0 ; 1] $f_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{f_0(x) + f_1(x)}{2}$.
   b) En déduire une construction de $\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}$ à partir de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ et tracer $\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}$ sur le même graphique que $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ en précisant le coefficient directeur de la tangente $\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$ à $\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}$ au point $A_{\frac{1}{2}}$