

Première partie - Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1).$$

1. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et, en détaillant les calculs effectués, montrer que

$$g'(x) = 2x - 2x \ln(x^2 + 1). \quad (0,75 \text{ point})$$

2. Faire l'étude du sens de variation de g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. (0,5 point)

3. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α , dans l'intervalle $\left[\sqrt{e-1}; \sqrt{e^2-1}\right]$, tel que $g(\alpha) = 0$; donner l'approximation décimale à 10^{-2} près par défaut de α . (0,75 point)

4. En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$. (0,5 point)

Deuxième partie - Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ lorsque } x \neq 0.$$

Sa courbe représentative (C), dans le plan rapporté à un repère d'origine O, est donnée en *annexe 2*, qui sera complétée et rendue avec la copie.

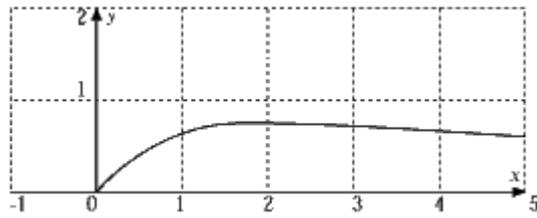
1. a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. (0,5 point)

En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$. (0,5 point)

b) Vérifier que, pour x strictement positif, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$. (0,5 point)

Faire l'étude du sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. (0,5 point)

Annexe 2



2. a) Montrer que, pour $x \geq 1,0$; $f(x) \leq \frac{\ln(2x^2)}{x}$. (1 point)

b) En déduire la limite de f en $+\infty$. (0,5 point)