TS **LOGARITHME** feuille 17

PROBLÈME *(10 points)* commun à tous les candidats

Le but du problème est l'étude d'une fonction *f*, d'une de ses primitives et d'une suite attachée à cette fonction. Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 5$ cm.

Partie A

Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On note (C) sa courbe représentative.

1. Montrer que *f* est paire. Étudier ses variations sur [0 ; **+∞** [et déterminer sa limite en **+ ∞**. Tracer sa courbe (C). (2 points)

2. Montrer que *f* établit une bijection de [0 ; **+∞**[sur]0 ; 1].

On note *y* un réel quelconque de l'intervalle]0 ; 1]. Exprimer en fonction de *y* le seul réel positif *x* vérifiant *f*(*x*) = *y*. (1 point)

Partie B

Soit F la fonction définie sur R par $\mathrm{F}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

(On admettra que, pour tout réel *x*, $x+\sqrt{1+x^2} > 0$).

1. Calculer F'(*x*). En déduire que F est la primitive de *f* sur R qui s'annule en 0.

(0,5 point)

2. *a*) Déterminer la limite de F en **+ ∞**.

b) Montrer que F est impaire.

c) En déduire la limite de F en**- ∞**. (1,5 point)

3. Soit λ un réel strictement positif. On note *A* (λ) l'aire en cm^2 de la partie du plan constituée des points M(*x* ; *y*) tels que $\lambda \leq x \leq 2\lambda$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Exprimer A (λ) en fonction de λ ; donner la valeur exacte de A (λ) et déterminer la limite de A (1) quand λ tend vers **+ ∞**. (1,5 point)

Partie C

On pose $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x$.

1. Calculer u_0. Calculer u_3 à l'aide d'une intégration par parties.

(Remarquer que $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$). (1,5 point)

2. Montrer que, pour tout x de l'intervalle [0 ; 1], $0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$.

En intégrant cette double inégalité sur [0 ; 1], montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite. (1 point)