1.1.1 Limites infinies

Définition 1 *limite d'une fonction*
Soit f une fonction.

1. *On dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si et seulement si :*
   pour tout intervalle $I =]\lambda; +\infty[$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, tous les nombres $f(x)$ sont dans l'intervalle I dès que x est assez grand (respectivement $-x$ assez grand)
2. *Énoncés analogues pour une limite égale à $-\infty$*

Exemple(s)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ pout tout $n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ impair
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pair

1.1.2 Limite finie en l'infini

Définition 2 limite l
Soit l un nombre réel. On dit que la fonction f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$)si et seulement si :
pour tout intervalle ouvert I contenant l, les nombres $f(x)$ sont tous dans I dès que x est assez grand (respectivement $-x$ assez grand).
On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l (\textit{ Respectivement : } \lim_{x \to -\infty} f(x) = l)$$

Remarque :
On peut alors dire que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe représentative de f (en $+\infty$ ou $-\infty$ selon le cas.)

1.1.3 limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un réel

f est une fonction définie sur un intervalle I contenant a ou dont a est une borne. (f peut ne pas être définie en a)

Définition 3 Limite l en a
On dit que f tend vers l quand x tend vers a si et seulement si
pour tout intervalle ouvert J contenant l, tous les nombres $f(x)$ appartiennent à J dès que $x \in I$ est assez proche de a

Définition 4 Limite infinie en a
On dit que f tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque x tend vers a si et seulement si :
pour tout intervalle $J =]\lambda; +\infty[$ (respectivement $]-\infty; \lambda[$) $\lambda \in \mathbb{R}$, tous les nombres $f(x)$ appartiennent à J dès que $x \in I$ est assez proche de a.

Note : Lorsque l'on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentant f.
Pour les asymptotes obliques, voir les exercices.

1.2 A retenir

Théorème 1 admis

1. *Fonction usuelle définie en a :*
   Lorsque f est une fonction polynôme ou l'une des fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x$ ou encore la somme, le produit, le quotient, la composée ou la valeur absolue de telles fonctions :

   Si f ***est définie en*** *a, alors*
   $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

2. *Fonction non définie en a :*
   Si, pour tout $x \neq a$, $f(x) = g(x)$, où g est une fonction usuelle définie en a, alors f admet une limite en a, et
   $$\lim_{x \to a} f(x) = g(a)$$

3. *Un résultat à connaître :*
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

1.3 Opérations sur les limites

Dans tous les tableaux qui suivent, α désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$ et l et l' désignent deux réels.
Les fonctions f et g considérées sont définies au voisinage de α.
Les limites de ces fonctions sont déterminées en α.

<u>limite d'une somme</u>

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

<u>limite d'un produit</u>

Si f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f \times g$ a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

remarque : limite en $+\infty$ de ax^n
On déduit du tableau que pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et que,
Si $a > 0$, $\lim_{x \to +\infty} (ax^n) = +\infty$ et si $a < 0$, $\lim_{x \to +\infty} (ax^n) = -\infty$.

Exercice 1 Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^3\left(\frac{1}{x} - 2\right)$.

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} - 2\right) = -2$ et $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$, donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

limite en l'infini d'une fonction polynôme

Exercice 2 Déterminer $\lim_{x \to +\infty} x^3 + 2x^2 - 4$

$x^3 + 2x^2 - 4 = x^3\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^3}\right)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x^3} = 0$

d'où $\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^3} = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$. Donc $\lim_{x \to +\infty} x^3 + 2x^2 - 4 = +\infty$.

Remarque :La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction **polynôme** est la limite de son terme de plus haut degré.

limite d'un quotient

$\longrightarrow$ cas où le dénominateur a une limite non nulle

Si f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Si g a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

$\longrightarrow$ cas où le dénominateur a une limite nulle

f a pour limite	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0
g a pour limite	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{4x-6}$.

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} x^3 = \dfrac{27}{8}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} 4x - 6 = 0$.

Si $x > \dfrac{3}{2}$, alors $4x - 6 > 0$ et dans ce cas, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2}}} f(x) = +\infty$

Si $x < \dfrac{3}{2}$, alors $4x - 6 < 0$ et dans ce cas, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x < \frac{3}{2}}} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $y = \frac{3}{2}$ est asymptote verticale à la courbe représentant f.

limite en l'infini d'une fonction rationnelle

Exercice 4 Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+4}{3x^2-5}$

$$\frac{2x+4}{3x^2-5} = \frac{x^2\left(\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3 - \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}{3 - \frac{5}{x^2}} \quad \text{pour } x \neq 0$$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+4}{3x^2-5} = 0$

Remarque : La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction **rationnelle** est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré.

1.4 Limites et ordre

Théorème 2 Limites et ordre

1. *Théorème des « Gendarmes »*

   Si, pour x « assez voisin de a »(a fini ou infini), on a : $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si u et v ont la même limite l en a, alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

2. *Cas d'une limite infinie*

   Si, pour x « assez voisin de a »on a $f(x) \geq u(x)$, et si :

$$\lim_{x \to a} u(x) = +\infty, \textit{ alors } \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

(Énoncé analogue pour $-\infty$)