EXERCICE 4 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\, dx.$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n > 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x)\, dx = (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\, dx = e$. Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?