

Exercice 2 (5 points)**Partie A : Restitution organisée de connaissances**

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(x) \, dx \geq 0$.
- Pour tous réels α et β , $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)] \, dx = \alpha \int_a^b u(x) \, dx + \beta \int_a^b v(x) \, dx$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 e^{-x^2} \, dx \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 x^n f(x) \, dx = \int_0^1 x^n e^{-x^2} \, dx \end{cases}$$

1. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$.

b. En déduire que $\frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1$.

2. Calculer u_1 .

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n$.

b. Étudier les variations de la suite (u_n) .

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n) .