EXERCICE 3 (7 points)

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$.
Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est donnée en annexe, page 6.

1. a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

2. On pose I=$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

b) Calculer I.

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\ ;1\ ]$.
On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$.

En déduire la limite de la suite (u_n).

Annexe

EXERCICE 3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur