EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \text{ pour } n \geq 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n - \ln n \text{ pour } n \geq 1.$$

1) **a)** Calculer u_2, u_3 et u_4.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad 0 \leq v_n \leq 1.$$

3) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4) Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ). Quelle est la limite de la suite (u_n) ?