

EXERCICE 2**5 points****Commun à tous les candidats**

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 e^{1-x}.$$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.

- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour \mathcal{C} peut-on en tirer?
 - Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} . Déterminer sa fonction dérivée f' .
 - Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe \mathcal{C} .
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

- Établir une relation entre I_{n+1} et I_n .
 - Calculer I_1 , puis I_2 .
 - Donner une interprétation graphique du nombre I_2 . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1 c.
3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e.$$

- b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.