

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0; 1]$ telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ de } [0; 1].$$

On ne cherchera pas à déterminer f .

PARTIE A.

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0; 1]$.
2. Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan(x))$.
 - a. Justifier que g est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$.
 - b. Montrer que, pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$, en déduire que $f(1) = \frac{\pi}{4}$.
3. Montrer que, pour tout x de $[0; 1]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$.

PARTIE B.

Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \int_0^1 f(x) dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, $I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$.
2.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $I_n \geq 0$.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$.
 - c. En déduire la limite de la suite (I_n) .