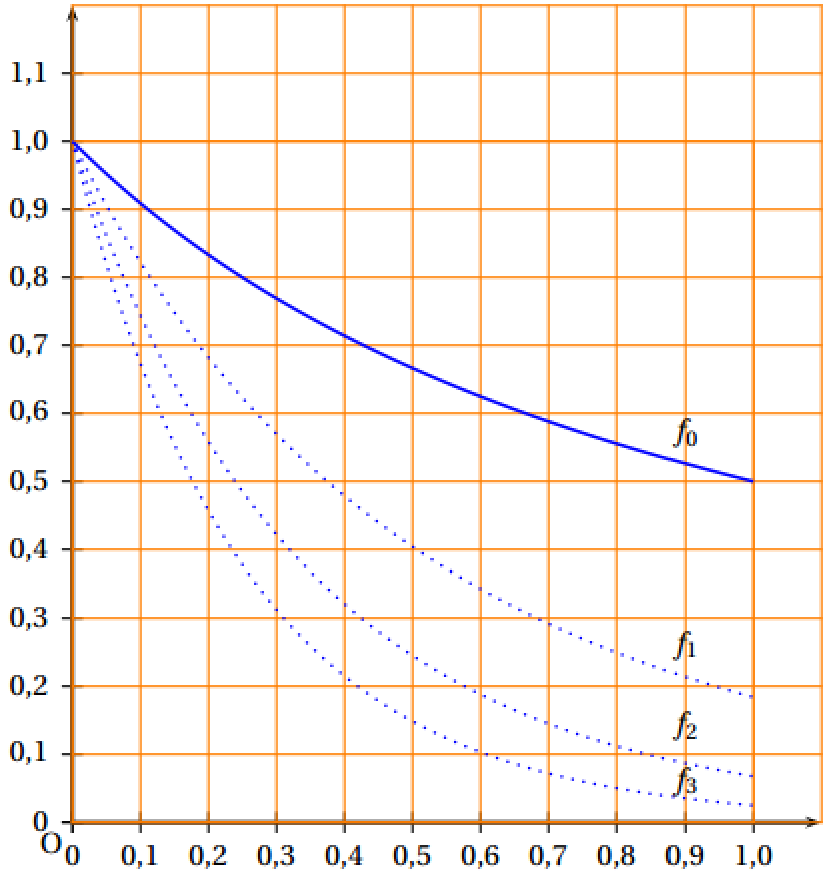
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n :



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

2. **a.** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}.$$

b. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. **a.** Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right).$$

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$.