EXERCICE 3 **8 points**

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f : t \longmapsto (2-t)\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g : t \longmapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ sur $[0\,;\,1]$.
   En déduire la valeur de u_n.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{(R)}$$

Autre méthode Soit g la fonction définie par : g(t) = $(1-t)^{n+1}e^t$

Calculer g '(t) et intégrer la relation

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par le deuxième calculatrice
1	7,182 818 284 5E−01	7,182 818 284 6E−01
2	4,365 636 569 1E−01	4,365 636 569 2E−01
3	3,096 909 707 5E−01	3,096 909 707 6E−01
4	2,387 638 830 1E−01	2,387 638 830 4E−01
5	1,938 194 150 8E−01	1,938 194 152 0E−01
6	1,629 164 905 1E−01	1,629 164 912 0E−01
7	1,404 154 335 81E−01	1,404 154 384 0E−01
8	1,233 234 686 9E−01	1,233 235 072 0E−01
9	1,099 112 182 8E−01	1,099 115 648 0E−01
10	9,911 218 282 5E−02	9,911 564 800 0E−01
11	9,023 401 108 0E−02	9,027 212 800 0E−02
12	8,280 813 296 3E−02	8,326 553 600 0E−02
13	7,650 572 852 2E−02	8,245 196 800 0E−02
14	7,108 019 930 9E−02	1,543 275 520 0E−01
15	6,620 298 963 6E−02	1,314 913 280 06E+00

16	5,924 783 418 6E−02	2,003 861 248 0E+01
17	7,213 181 161 2E−03	3,396 564 121 6E+02
18	−8,701 627 390 9E−01	6,112 815 418 9E+03
19	−1,753 309 204 2E+01	1,161 424 929 6E+05
20	−3,516 618 408 5E+02	2,322 848 859 2E+06
21	−7,385 898 658 0E+03	4,877 982 504 3E+07
22	−1,624 907 704 7E+05	1,073 156 149 9E+09
23	−3,737 288 720 9E+06	2,468 259 144 8E+10
24	−8,969 493 030 2E+07	5,923 821 947E+11
25	−2,242 372 585E+09	1,480 955 486 9E+13

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.
2. **a.** Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

   b. En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n).

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \quad \text{et pour tout entier naturel non nul } n, \; v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-\mathrm{e})$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a. (On rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$.)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.