

PARTIE A

Pour tout entier n strictement positif on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}.$$

n étant un entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$.

1. On pose $F(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.
Calculer $F'(x)$, en déduire I_1 .

2) soit $g(x) = \frac{(\ln x)^{n+1}}{x}$ calculer $g'(x)$ et montrer que :

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$

PARTIE B

1. En utilisant la question 2. de la partie C, montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul :

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$$

2. En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1; e]$, montrer que, pour tout n entier naturel non nul :

$$0 \leq I_n \leq 1.$$

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$.