Pour tout entier n non nul : $I_n = \int_1^e x(lnx)^n \, dx$

1) a) étudier lorsque x appartient à l' intervalle [1 ; e] le signe de :

. x $(lnx)^{n+1}$ - x $(lnx)^n$

b) en déduire que la suite (I_n) est décroissante

2) soit f(x) = $x^2 \, (lnx)^{n+1}$, calculer la dérivée f ' (x)

En calculant de deux façons différentes $\int_1^e f\,'(x)dx$ montrer que :

2I_{n+1} + (n+1) I_n = e^2 puis que

2I_n + n I_{n-1} = e^2 (1)

3) a) Justifier que la suite (I_n) est positive puis qu' elle est convergente

b) en utilisant la relation (1) et la comparaison entre I_n et I_{n-1} montrer que ,

pour tout n ≥ 2 : $I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$

c) étudier la limite de la suite (I_n)