Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x^2) - 2x$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(unité graphique : 1 unité pour 0,6 cm sur la figure au verso)

Partie A – Étude de *f*

1°) Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) = 2x \ln \frac{x}{e}$

2°) a) Étudier la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que f est dérivable en tout $x > 0$; calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
c) Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
d) Donner le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.

3°) Déterminer par le calcul l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

4°) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet sur l'intervalle $[1; 5]$ une solution unique et en donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2}.

Partie B – Calcul d'aires

1°) Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \mathrm{F}(0) = 0 \\ \mathrm{F}(x) = x^2 \ln x - \dfrac{3x^2}{2} \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

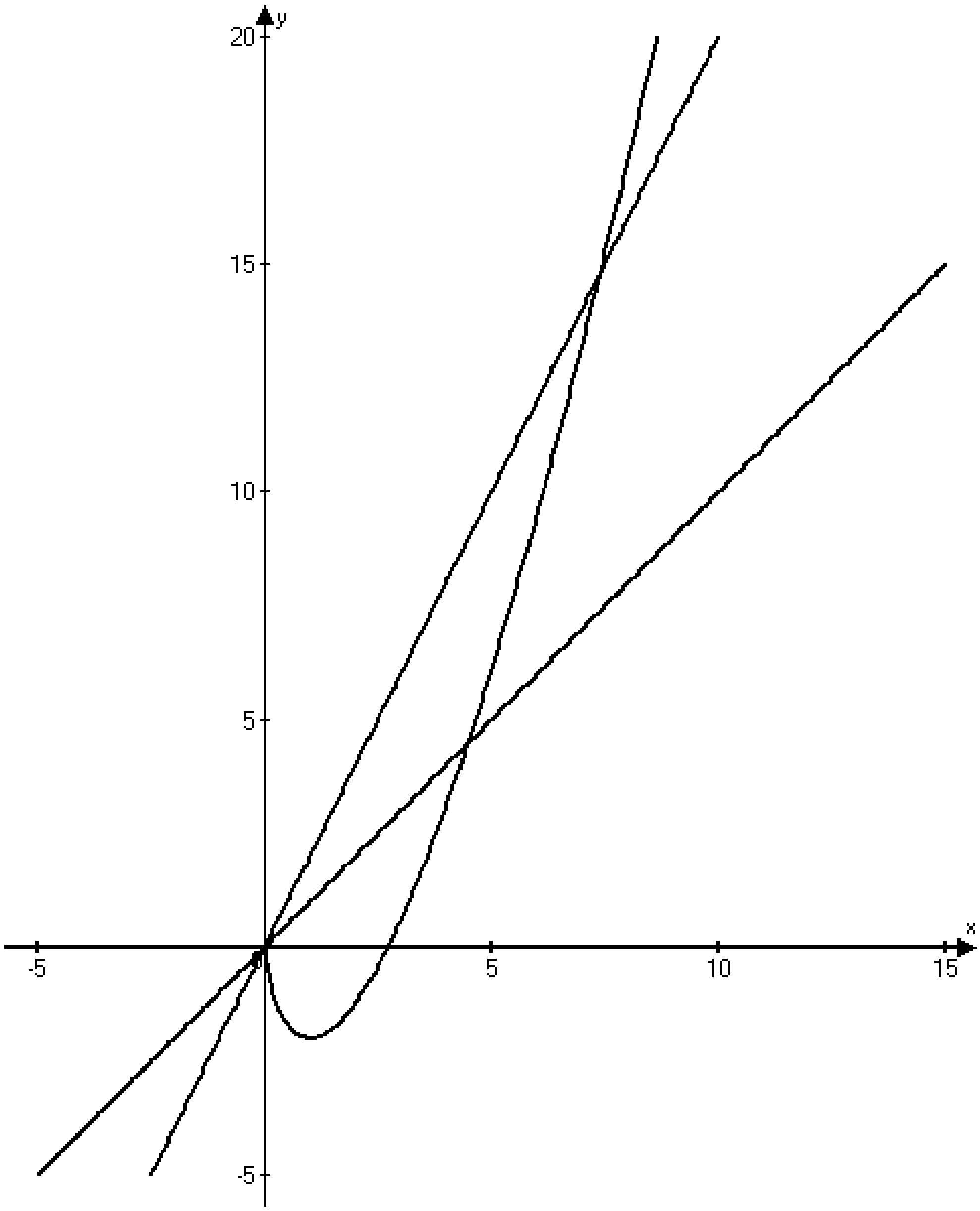
a) On admet que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$, montrer que F est dérivable en 0 et préciser F'(0).
b) Montrer que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

2°) On considère pour chaque entier n positif ou nul, la droite D_n d'équation $y = nx$.

On trouvera au verso un tracé de la courbe C et des droites D_0, D_1 et D_2.

a) Déterminer les coordonnées du point I_n, d'abscisse strictement positive, intersection de C et de D_n.
On appelle P_n le point de l'axe des abscisses de même abscisse que I_n.
Placer les points I_0, I_1, I_2, P_0, P_1, P_2 sur la figure donnée au verso.
b) Déterminer la position relative de C et de D_n, pour les abscisses appartenant à $]0; +\infty[$.

3°) Pour tout $n \geq 1$, on considère le domaine A_n situé dans le quart de plan défini par $x \geq 0$ et $y \geq 0$,



délimité par C, D_{n-1} et D_n.

On note a_n son aire, exprimée en unités d'aire.

a) Faire apparaître les domaines A_1 et A_2 sur la figure.
b) Calculer l'aire t_n du triangle OP_nI_n, en unités d'aire.
c) Calculer l'aire u_n, en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par $x \geq 0$ et $y \geq 0$, délimité par C, l'axe des abscisses, et les parallèles à l'axe des ordonnées passant par P_0 et P_n.
d) Vérifier que l'aire v_n, en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par $x \geq 0$ et $y \geq 0$, délimité par C, l'axe des abscisses et D_n, est $v_n = t_n - u_n = \dfrac{e^2}{2}(e^n - 1)$.
e) Calculer alors a_n.

4°) Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.