Problème *(commun à tous les candidats) (11 points)*

Soit *f* la fonction définie sur R par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$$

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) les unités graphiques étant 1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées. (*C*) est la représentation graphique de *f* dans ce repère.

La figure (1) ci-après est une représentation graphique de *f* dans un repère orthogonal qui ne respecte pas les unités précédentes.

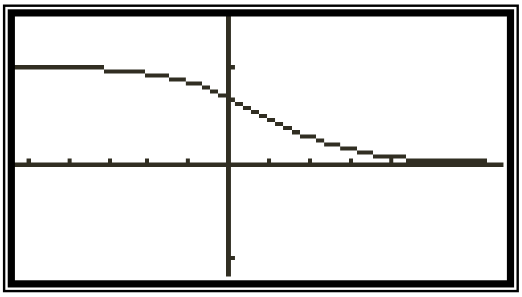

figure (1)

Partie A

1°) Calculer la dérivée *f'* de *f* sur R.

Montrer que, pour tout *x* réel, *f'*(*x*) est du signe de : $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$.

2°) a) Calculer *g'*(*x*).

b) Déterminer la limite de *g*(*x*) en $-\infty$.
c) Déterminer le sens de variation de la fonction *g*.
Déduire des questions précédentes le signe de *f'*(*x*).

3°) Déterminer les limites de *f*(*x*) en $+\infty$ et en $-\infty$.

On pourra utiliser les résultats suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

Dresser le tableau de variation de *f*.

On ne demande pas la construction de la courbe (C) mais on contrôlera la cohérence des résultats obtenus avec la figure (1).

Partie B

1°) Déterminer a et b réels tels que, pour tout réel x,

$$\frac{1}{1+e^x} = a + \frac{be^x}{1+e^x}.$$

En déduire I = $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

2°) A l'aide d'une intégration par parties, calculer J = $\int_0^1 f(x)dx$.

En déduire en cm^2 l'aire de la portion du plan comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et la courbe (C). On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au mm^2 près.