<u>Problème</u> (12 points)

Question préliminaire :

On admet que, pour tout nombre réel x strictement positif : $e^x \geq x + 1$ et $\ln x \leq x - 1$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
En déduire que, pour tout x strictement positif : $e^x - \ln x \geq 2$. (1)

Partie A - Etude d'une fonction.

On considère alors la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

On désigne par C la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; (unité graphique : 4 cm).

1°) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2°) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

3°) On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :
$g(x) = e^x - \ln x - xe^x + 1$.

a) Déterminer la limite de g en 0.
Déterminer la limite de g en $+\infty$. (on pourra mettre e^x en facteur dans l'expression de $g(x)$).
Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

c) Justifier que $1{,}23 \leq \alpha \leq 1{,}24$ (2).

d) Etudier le signe de $g(x)$ lorsque x d écrit l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

4°) a) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{e^{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}}$

En utilisant l'encadrement (2) du réel α, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$. En déduire que 0,38 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

5°) Tracer la courbe C et préciser ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et α.

Partie B - Etude d'une suite définie par une intégrale.

On considère la suite (u_n) définie par :
pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \int_1^n f(x)\,dx$.
(On ne cherchera pas à calculer cette intégrale)

1°) Interpréter géométriquement u_n.

2°) Etudier le sens de variation de la suite u_n.

3°) Soit φ la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par :
$\varphi(x) = e^x - x \ln x - \ln x$.
Calculer $\varphi'(x)$. En utilisant l'inégalité (1) de la partie préliminaire, démontrer que, pour tout réel $x \geq 1$, $\varphi'(x) \geq 0$.
En déduire que, pour tout réel $x \geq 1$, $\varphi(x) \geq 0$.

4°) a) En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout réel $x \geq 1$,
$$f(x) - \frac{1+x}{e^x} \leq 0.$$
b) Montrer que, pour tout réel $x \geq 1$,
$f(x) \geq xe^{-x}$.
a) En intégrant par parties, calculer, en fonction de l'entier naturel n, les deux intégrales suivantes :
$$\int_1^n xe^{-x}\,dx \quad \text{et} \quad \int_1^n (1+x)e^{-x}\,dx$$

5°) On admettra que la suite (u_n) converge et on appelle l sa limite.
Démontrer que : $\frac{2}{e} \leq l \leq \frac{3}{e}$.