

**1. Exercice 4 (6 points)**

---

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par :  $f(x) = xe^{1-x}$  et  $g(x) = x^2 e^{1-x}$ .

Les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  sont respectivement notées (C) et (C'). leur tracé est donné ci-dessous.

**1. Étude des fonctions  $f$  et  $g$** 

- Déterminer les limites des fonctions  $f$  et  $g$  en  $-\infty$ .
- Justifier le fait que fonctions  $f$  et  $g$  ont pour limite 0 en  $+\infty$ .
- Étudier le sens de variations de chacune des fonctions  $f$  et  $g$  et dresser leurs tableaux de variations respectifs.

**2. Calcul d'intégrales**

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit l'intégrale  $I_n$  par :  $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx$  et, si  $n > 1$ ,  $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$ .

- Calculer la valeur exacte de  $I_0$ .
- À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :  
$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.$$
- En déduire la valeur exacte de  $I_1$ , puis celle de  $I_2$ .

**3. Calcul d'une aire plane**

- Étudier la position relative des courbes (C) et (C').
- On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes (C) et (C'), d'autre part entre les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ .

En exprimant A comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité :  $A = 3 - e$ .

**4. Étude de l'égalité de deux aires**

Soit  $a$  un réel strictement supérieur à 1.

On désigne par  $S(a)$  l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes (C) et (C'), d'autre part entre les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = a$ .

On admet que  $S(a)$  s'exprime par :  $S(a) = 3 - e^{1-a} (a^2 + a + 1)$ .

L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de  $a$  pour laquelle les aires A et  $S(a)$  sont égales.

- Démontrer que l'équation  $S(a) = A$  est équivalente à l'équation :  $e^a = a^2 + a + 1$ .

b. Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel  $a$ , solution du problème posé.

