

**1. Exercice 4 (7 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = x + e^{-x}$ . On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A**

1. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. Montrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

**Partie B**

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  à termes positifs définie par :  $u_1 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}$$

1. Démontrer que, pour tout réel  $x$  positif,  $\ln(1+x) \leq x$ . On pourra étudier la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = x - \ln(1+x)$ .
2. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$ .
3. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $f(\ln(n)) = \ln(n) + \frac{1}{n}$ .
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\ln(n) \leq u_n$ .
5. En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,  $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$ .

6. a. Démontrer que, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2, on a :  $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$ .
- b. En déduire que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :  $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$ .
7. Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a montré que  $\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$ .

Démontrer que la suite  $\left( \frac{u_n}{\ln(n)} \right)_{n > 1}$  converge vers 1.