1. Exercice 3 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

• Soient *u* et *v* deux fonctions continues sur un intervalle [*a* ; *b*]. Pour tous réels α et β ,

$$\int_a^b \alpha u(x)+\beta v(x)\,dx=\alpha\int_a^b u(x)\,dx+\beta\int_a^b v(x)\,dx\,.$$

• Si *u* désigne une fonction continue sur un intervalle [*a* ; *b*] et *U* une primitive de *u* sur [*a* ; *b*], alors

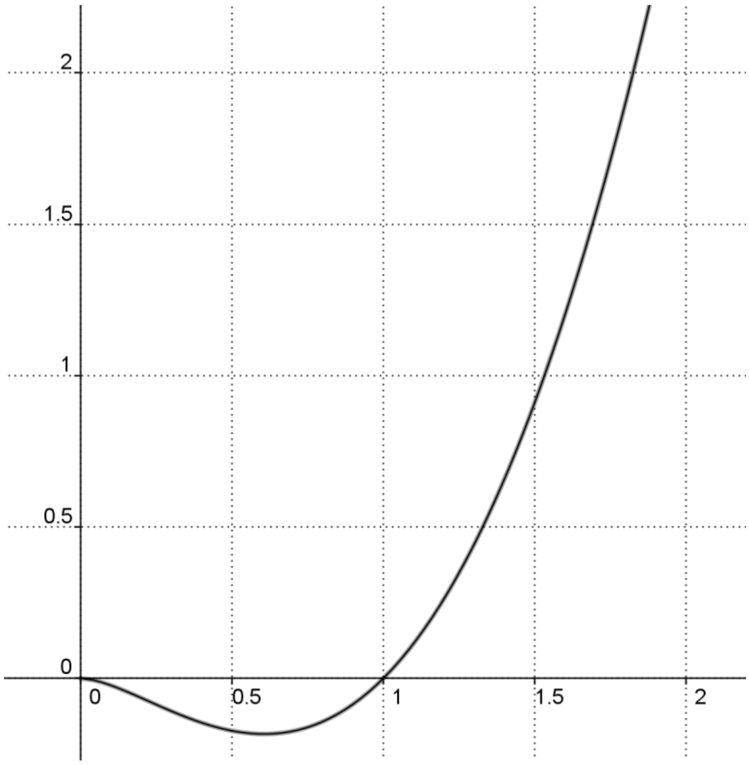
$$\int_a^b u(x)\,dx=\left[U(x)\right]_a^b=U(b)-U(a)\,.$$

En utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle [*a* ; *b*], démontrer la formule d'intégration par parties.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2\ln x$.

La courbe (C) représentative de la fonction *f* dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée ci-dessous.



1. a. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

b. Étudier les variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$.

2. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer qu'il existe une tangente unique à la courbe (C) passant par O. Préciser une équation de cette tangente.

3. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe (O*x*) de la région plane délimitée par la courbe (C), l'axe (O*y*) et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et *x* = 1. On note *V* une mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que : $V = \int_{1/e}^{1} \pi \left[f(x) \right]^2 dx$.

a. Montrer qu'une primitive de la fonction $x \to x^4 \ln x$ sur $\left] 0 ; +\infty \right[$ est la fonction $x \to \frac{x^5}{25}(5\ln x - 1)$.

b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que : $V = \frac{\pi}{125}\left(2 - \frac{37}{e^5} \right)$.