1. *Exercice 1 (7 points)*

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.

On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que pour tout *x* de $]0\,;+\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.

À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui à *x* associe $\dfrac{1}{x}$.

PARTIE B - Étude de fonction

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

Le but du problème est l'étude de cette fonction et le calcul d'une aire.

On note C la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 3 cm.

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction *g* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1. Étudier les variations de *g* sur $]0\,;+\infty[$.

2. En déduire le signe de *g* sur $]0\,;+\infty[$.

II - Étude de la fonction *f* et tracé de sa courbe représentative C

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction *f*. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

2. Déterminer la limite en $+\infty$ de *f* puis montrer que la droite D d'équation *y* = *x* est asymptote à la courbe C.

3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction *f*. Calculer $f'(x)$ pour tout réel *x* de $]0\,;+\infty[$.

4. En déduire le sens de variation de *f* sur $]0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

5. Déterminer le point *A* de la courbeC en lequel la tangente T est parallèle à la droite D.

6. Dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ tracer les droites D et T et la courbe C.

III - Calcul d'une aire

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}$.

2. En déduire l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation *x* = 1, *x* = *e*, l'axe des abscisses et la courbe C. On exprimera cette aire en cm^2. Hachurer cette région sur le graphique.