1. Exercice 4 (7 points)

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction.

PARTIE A

On note *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. On note C la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Étude des limites

a. Déterminer la limite de la fonction *f* quand *x* tend vers 0.

b. Déterminer la limite de la fonction *f* quand *x* tend vers $+\infty$.

c. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe C ?

2. Étude des variations de la fonction *f*

a. Démontrer que *f'*, la fonction dérivée de la fonction *f* s'exprime, pour tout réel *x* strictement positif, par :

$$f'(x)=-\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

b. Déterminer le signe de *f'* et en déduire le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c. Démontrer que l'équation *f*(*x*) = 2 a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe C dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE B. Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel *n* > 2 on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n=\int_1^2\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\,dx$.

1. Calculer I_2.

2. Une relation de récurrence

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel *n* > 2 :

$$I_{n+1}=e-\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}+(1-n)I_n.$$

b. Calculer I_3.

3. Étude de la limite de la suite de terme général I_n

a. Établir que pour tout nombre réel *x* appartenant à l'intervalle [1 ; 2], on a : $0\le\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\le\frac{e}{x^n}$.

b. En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).