

1. Exercice 3 (5 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f , définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$, vérifiant la condition (E) : pour tout nombre réel x strictement positif, $xf'(x) - f(x) = x^2e^{2x}$.

1. Montrer que si une fonction f , définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ vérifie : pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = e^{2x}$.

2. En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui vérifient la condition (E).

3. Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\frac{1}{2}$?

Partie B

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x , le signe de $h(x)$.

2. a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx$ et en déduire $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx$.

b. En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe C.