TS **INTEGRALES** feuille 44

1. Exercice 4 (7 points)

La figure qui suit l'exercice sera complétée.

Partie A

1. On considère la fonction *g* définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(2x)+1-x$.

a. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[1\,;+\infty[$ une unique solution notée α.

b. Démontrer que $\ln(2\alpha)+1=\alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel *n*, par $u_{n+1}=\ln(2u_n+1)$.

On désigne par (C) la courbe d'équation $y=\ln(2x)+1$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous.

a. En utilisant la courbe (C), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

b. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $1\le u_n\le u_{n+1}\le 3$.

c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)e^{1-x}$.

On désigne par (H) la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous.

1. Pour tout nombre réel *x* supérieur ou égal à 1, on pose : $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt$.

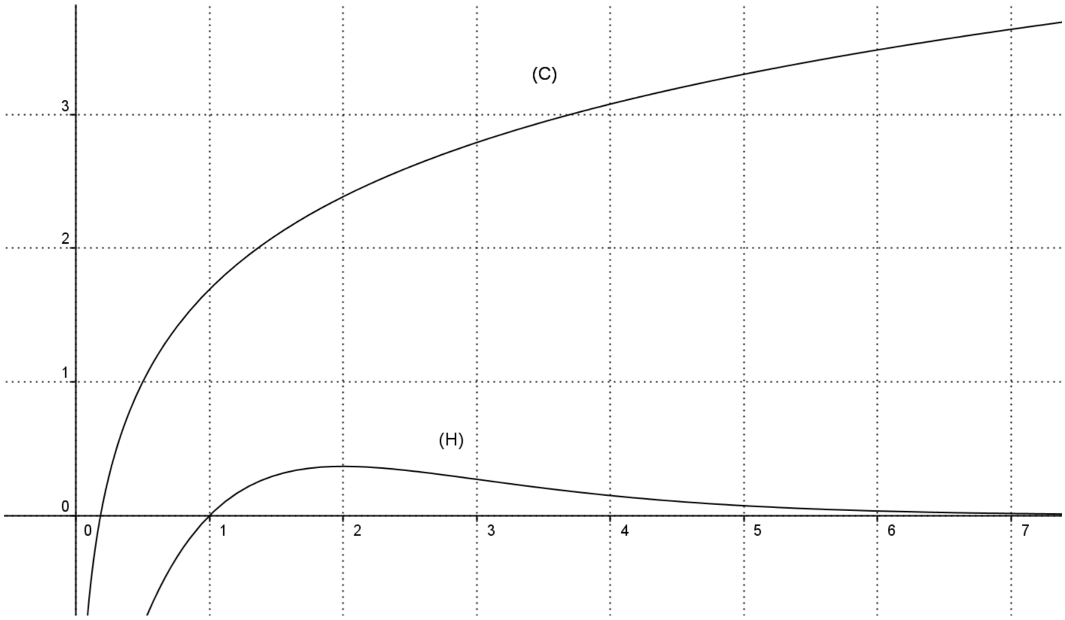
a. Démontrer que la fonction *F* est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel *x* appartenant à $[1\,;+\infty[$, $F(x)=-xe^{1-x}+1$.

c. Démontrer que sur $[1\,;+\infty[$, l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation ln(2*x*) + 1 = *x*.

2. Soit un réel *a* supérieur ou égal à 1. On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (H), l'axe des abscisses et les droites d'équation *x*= 1 et *x* = *a*.

Déterminer *a* tel que l'aire, en unités d'aires, de D_a, soit égale à $\frac{1}{2}$ et hachurer D_a sur le graphique.


(C)
(H)
0
1
2
3
0
1
2
3
4
5
6
7