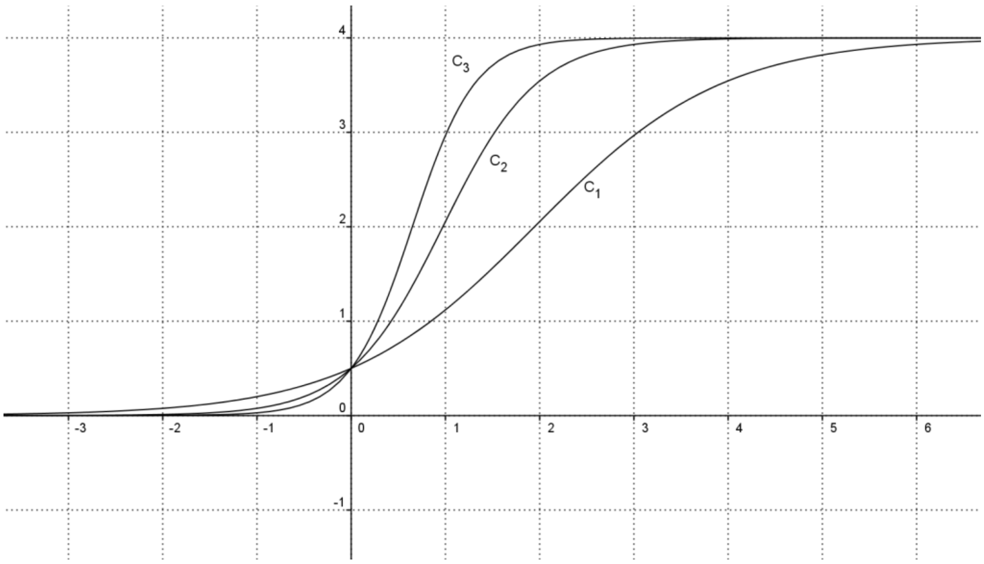
1. Exercice 4 (8 points)

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur R par $f_n(x)=\frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$.

On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Les courbes C_1, C_2 et C_3 sont données ci-dessous.



Partie A : Etude de la fonction f_1 définie sur R par $f_1(x)=\frac{4e^{x}}{e^{x}+7}$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x)=\frac{4}{1+7e^{-x}}$.

2. a. Démontrer que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera des équations.

b. Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur R .

c. Démontrer que pour tout réel x, $0<f_1(x)<4$.

3. a. Démontrer que le point I_1 de coordonnées (ln7, 2) est un centre de symétrie de la courbe C_1.

b. Déterminer une équation de la tangente T_1 à la courbe C_1 au point I_1.

c. Tracer la droite T_1.

4. a. Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur R .

b Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle [0, ln7].

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y=2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse. On note I_n ce point d'intersection.

b. Déterminer une équation de la tangente T_n à la courbe C_n au point I_n.

c. Tracer les droites T_2 et T_3.

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n=\dfrac{n}{\ln 7}\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx$.

Montrer que la suite (u_n) est constante.