

1. Exercice 1 (5 points)

Partie A

Restitution organisée de connaissances. On supposera connus les résultats suivants :

$$* e^0 = 1 .$$

$$* \text{ Pour tous réels } x \text{ et } y, e^x \times e^y = e^{x+y} .$$

1. Démontrer que pour tout réel x , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n , $(e^x)^n = e^{nx}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$.

1. a. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b. Calculer u_1 . En déduire u_0 .

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

3. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .