1. Exercice 1 (6 points)

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soit *a* et *b* deux réels tels que *a* < *b* et *f* et *g* deux fonctions continues sur l'intervalle [*a* ; *b*]. On suppose connus les résultats suivants :

• $\int_a^b \left(f(t)+g(t)\right)dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

• Si pour tout $t \in [a\,;b]$, $f(t) > 0$ alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a\,;b]$, $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

Partie B

Soit *n* un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \ln\left(1+x^n\right)$ et on pose $I_n = \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)dx$. On note C_n la courbe représentative de *fn* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f_1 sur $[0\,;+\infty[$.

c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat. (Pour le calcul de I_1 on pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0\,;1]$, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$).

2. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul *n*, on a $0 \leq I_n \leq \ln 2$.

b. Étudier les variations de la suite (I_n).

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. Soit *g* la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

a. Étudier le sens de variation de *g* sur $[0\,;+\infty[$.

b. En déduire le signe de *g* sur $[0\,;+\infty[$. Montrer alors que pour tout entier naturel *n* non nul, et pour tout *x* réel positif, on a $\ln\left(1+x^n\right) \leq x^n$.

c. En déduire la limite de la suite (I_n).