TS **INTEGRALES** feuille 36

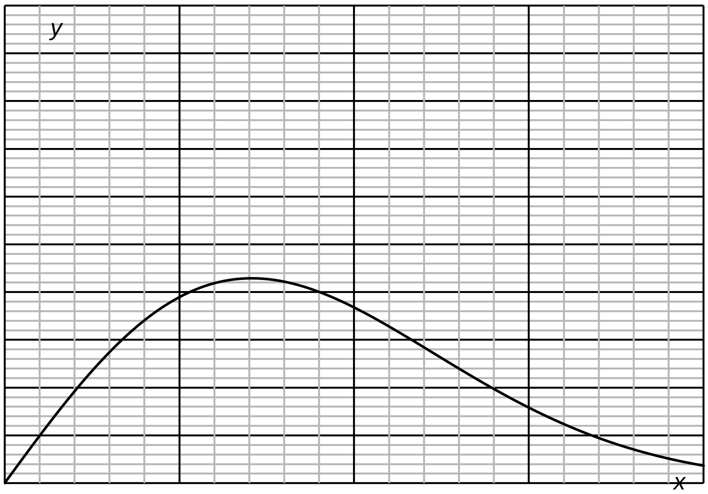
1. Exercice 1

7 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=xe^{-x^2}.$$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. On pourra écrire, pour x différent de 0,

$$f(x)=\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

b. Démontrer que f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1 : $f(n+1)\le u_n\le f(n)$.

b. Quel est le sens de variation de la suite (u_n), $n > 2$?

c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n)=\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

Interpréter ces résultats.