

1. Exercice 4

6 points

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Étudier le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} .
- b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} . Calculer, pour tout nombre réel x , $f'(x)$.

En déduire les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

- d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_{-1}^n f(x) dx$.

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

- a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n > 0$.
 - b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x) dx = (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}.$$

- b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n .
- c. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e$. Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?