TS **INTEGRALES** feuille 34

1. Exercice 1

7 points

On désigne par (E) l'ensemble des fonctions *f* continues sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ et vérifiant les conditions P_1, P_2 et P_3 suivantes :

P_1 : *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$.

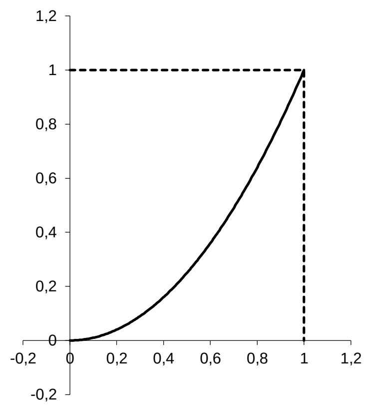
P_2 : $f\left(0\right)=0$ et $f\left(1\right)=1$.

P_3 : Pour tout réel *x* de l'intervalle $\left[0\,;1\right]$, $f\left(x\right)\leq x$.

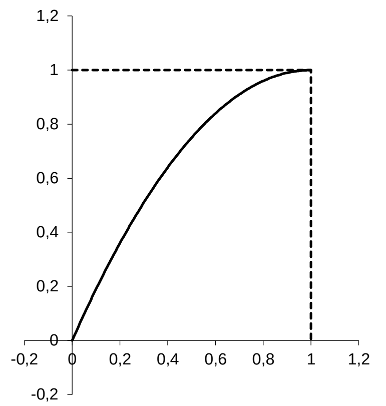
Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on note (C) la courbe représentative d'une fonction *f* de l'ensemble (E) et (D) la droite d'équation $y=x$.

A toute fonction *f* de (E) on associe le nombre réel $I_f=\int_0^1\left[x-f\left(x\right)\right]dx$.

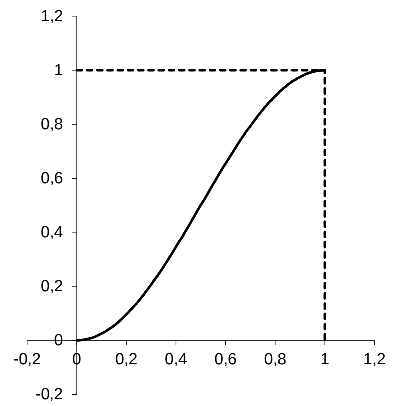
1. a. Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E). La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.



Courbe n°1



Courbe n°2



Courbe n°3

b. Montrer que, pour toute fonction *f* de (E), $I_f\geq 0$.

2. Soit *h* la fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ par $h\left(x\right)=2^x-1$ (on rappelle que pour tout réel *x*, $2^x=e^{x\ln 2}$).

a. Montrer que la fonction *h* vérifie les conditions P_1 et P_2.

b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ par $\varphi\left(x\right)=2^x-x-1$.

Montrer que, pour tout x de $\left[0\,;1\right]$, $\varphi\left(x\right)\leq 0$ (on pourra étudier les variations de φ sur $\left[0\,;1\right]$). En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).

c. Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln 2}$.

3. Soit *P* une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $P(x)=ax^2+bx+c$ où *a*, *b* et *c* sont trois nombres réels avec $0<a<1$. On se propose de déterminer les valeurs des réels *a*, *b* et *c* pour que la fonction *P* appartienne à l'ensemble (E) et que $I_P=I_h$.

a. Montrer que la fonction *P* vérifie la propriété P_2 si et seulement si, pour tout réel de l'intervalle $[0\,;1]$, $P(x)=ax^2+(1-a)x$.

Montrer que toute fonction *P* définie sur $[0\,;1]$ par $P(x)=ax^2+(1-a)x$ avec $0<a<1$ appartient à (E).

b. Exprimer en fonction de *a* le réel I_P associé à la fonction *P*.

c. Montrer qu'il existe une valeur du réel *a* pour laquelle $I_P=I_h$. Quelle est cette valeur ?