1. Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie sur N* par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n deN*, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; $+\infty$ [par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1. a. Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n}$.

b. Vérifier que $\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{n} - f(n)$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

2. On considère la suite (S_n) définie sur N* par

$$S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) \leq S_n$.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de −1 et de 0, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

c. En déduire l'égalité $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$.

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{k=2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n).$$

e. Vérifier que pour tout entier $n > 1$, $f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).