1. Exercice 4

6 points

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=1+x\ln x$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire ***A*** du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

On note *M* et *N* les points de (C_f) d'abscisses respectives 1 et 2, *P* et *Q* leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée plus bas.

1. a. Montrer que *f* est positive sur $[1\,;2]$.

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (*MN*) est $2\ln 2$.

c. Soit *E* le point d'abscisse $\frac{4}{e}$. Montrer que sur l'intervalle $[1\,;2]$, le point *E* est l'unique point de (C_f) en lequel la tangente à (C_f) est parallèle à (*MN*).

d. On appelle (T) la tangente à (C_f) au point *E*. montrer qu'une équationde (T) est :
$y=(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1$.

2. Soit *g* la fonction définie sur $[1\,;2]$ par $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right]$.

a. Montrer que $g'(x)=1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)$ pour tout *x* de $[1\,;2]$.

b. Etudier les variations de *g* sur $[1\,;2]$ et en déduire la position relative de (C_f) et de (T) sur cet intervalle.

3. Soient *M'* et *N'* les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite (T). On admet que la courbe (C_f) reste sous la droite (*MN*) sur l'intervalle $[1\,;2]$ et que les points *M'* et *N'* ont des ordonnées strictement positives.

a. Calculer les aires des trapèzes *MNQP* et *M'N'QP*.

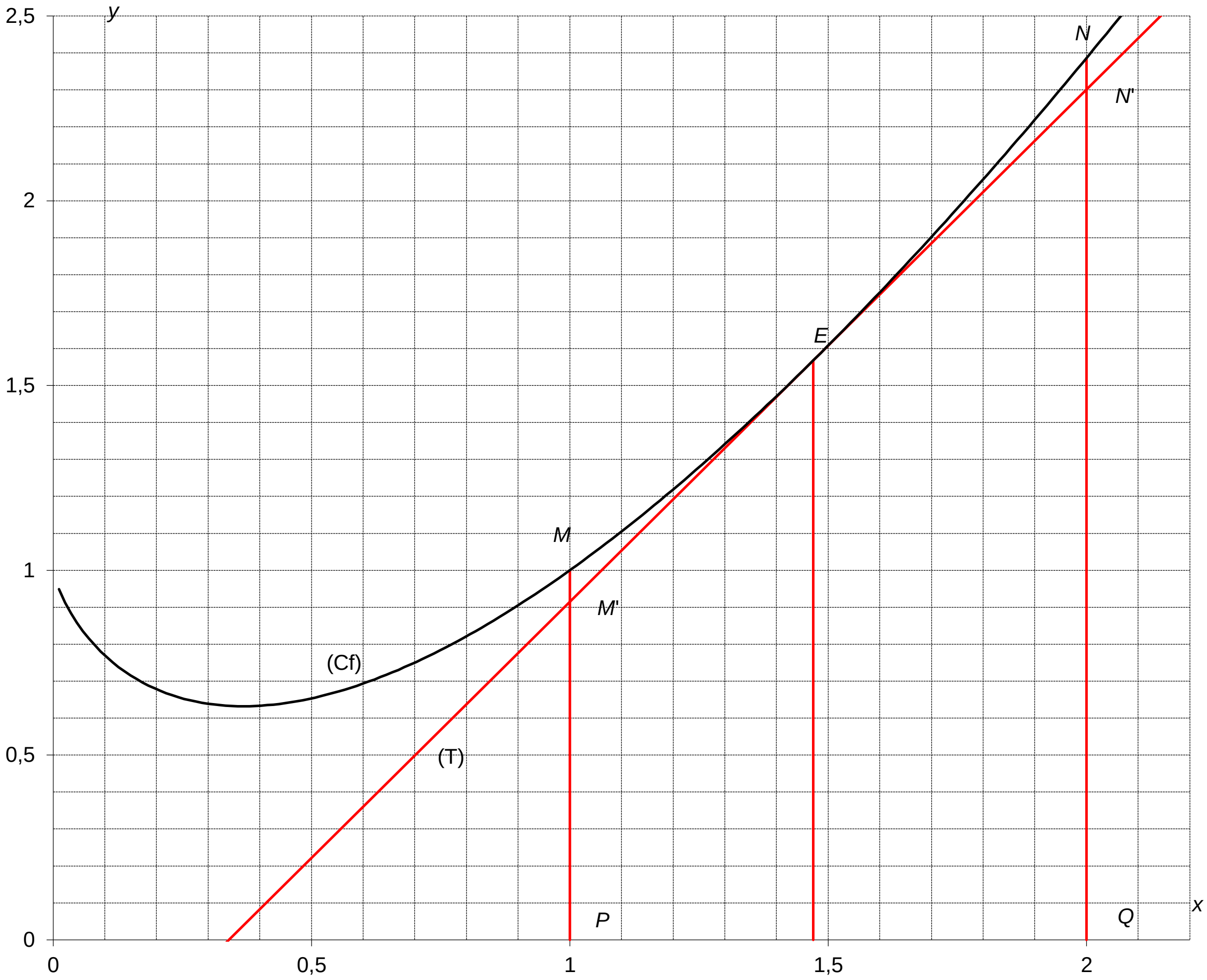
b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de ***A*** d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de ***A***.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

2. En déduire la valeur exacte de ***A***.



y
x
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0,5
1
1,5
2
N
N'
E
M
M'
(Cf)
(T)
P
Q