Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.
   c. Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   d. Étudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,;\,+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$.
   c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\,;\,1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. **a.** Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.
   b. On admet le tableau de signes suivant :

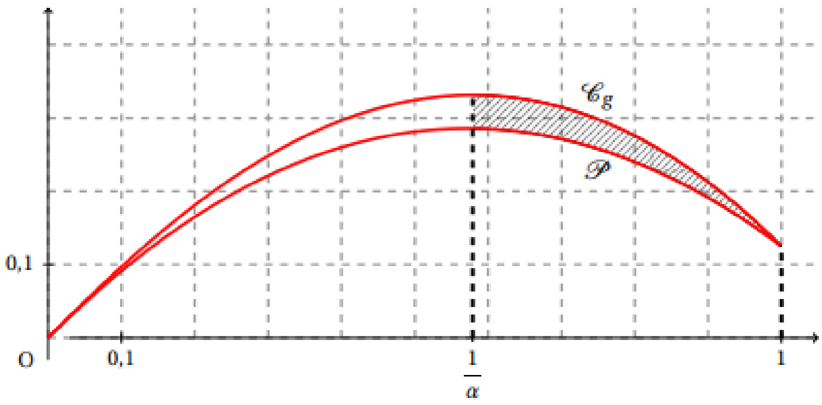
x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	||	$+$	0	$-$	

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;
- La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.
On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1. **a.** Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

   b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathscr{A}$.