Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f

a. Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.

b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. On considère une fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

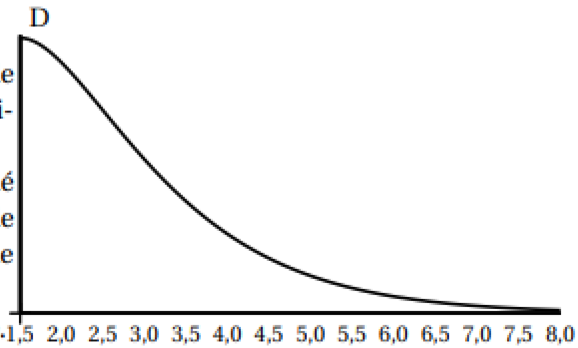
a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. On admet que $F(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.
Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\,;\,8\right]$.
L'unité de longueur est le mètre.



a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.

Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de $0,8\ m^2$, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.