TS **INTEGRALES** feuille 29

1. Exercice 1

6 points

Question de cours

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) > g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dt \geq \int_a^b g(x)\,dt$.

Partie A

1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Calculer en fonction de x l'intégrale $\int_1^x (2-t)\,dt$.

2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1\,;+\infty[$, on a : $2-t \leq \frac{1}{t}$.

3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a : $-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} \leq \ln x$.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$.

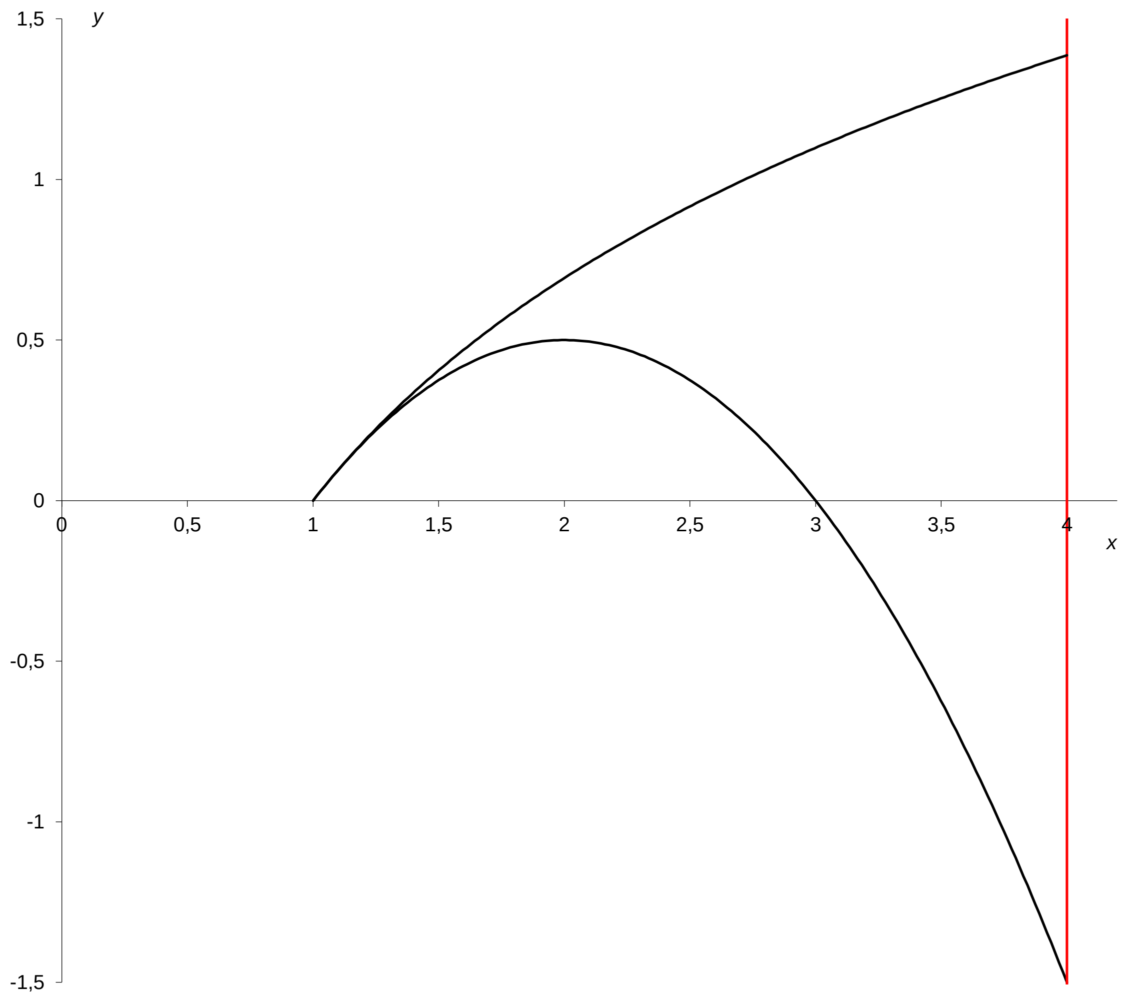
Sur le graphique joint en annexe, le plan estmuni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle [1 ; 4]. On a a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.

1. a. Démontrer que $\int_1^4 h(x)\,dx = 0$.

b. Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.

2. On note D le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle [1 ; 4].

En utilisant un intégration par parties, calculer l'aire de D en unités d'aire.



1,5
y
1
0,5
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
x
-0,5
-1
-1,5