1. Exercice 4

7 points

1. Restitution organisée de connaissances.

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

* la fonction exponentielle est dérivable sur R et est égale à sa fonction dérivée ;

* $e^0 = 1$;

* pour tout réel *x*, on a $e^x > x$;

* soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\,;+\infty[$ où *A* est un réel positif. Si, pour tout *x* de $[A\,;+\infty[$, on a $\psi(x) \leq \varphi(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. On considère la fonction *g* définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout *x* de $[0\,;+\infty[$, $g(x) \geq 0$.

b. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

2. On appelle *f* la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$. On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. La courbe C est représentée ci-dessous.

a. Montrer que *f* est positive sur $[0\,;+\infty[$.

b. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour C.

c. Etudier les variations de *f* puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;+\infty[$.

3. On considère la fonction *F* définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a. Montrer que *F* est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Montrer que $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

c. Calculer la limite de *F* en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de *F* sur $[0\,;+\infty[$.

d. Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $F(\alpha) = 0{,}5$. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4. Soit *n* un entier naturel non nul. On note A_n l'aire en unités d'aire de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$. Déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $A_n \geq 0,5$.