1. Exercice 3

5 points

On considère la fonction *f* définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que *f* est dérivable sur $[0\,;+\infty[$. Etudier le signe de sa fonction dérivée *f'*, sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par son terme général $u_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a. Justifier que, si $n\leq x\leq n+1$, alors $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que pour tout entier naturel *n*, $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit *F* la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x)=[\ln(x+3)]^2$.

a. Justifier la dérivabilité de *F* sur $[0\,;+\infty[$ et déterminer pour tout réel positif *x* le nombre $F'(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel *n*, $I_n=\int_0^n f(x)\,dx$. Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel *n*, $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$.

Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?