## *1. Exercice 4 (7 points)*

### Partie A

On considère les fonctions *f* et *g* définies sur *R* par $f(x)=e^{-x^2}$ et $g(x)=x^2e^{-x^2}$.

On note respectivement $C_f$ et $C_g$ les courbes représentatives de *f* et *g* dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

1. Identifier $C_f$ et $C_g$ sur la figure fournie (justifier la réponse apportée).

2. Étudier la parité des fonctions *f* et *g*.

3. Étudier le sens de variationde *f* et de *g* . Étudier les limites éventuelles de *f* et de *g* en $+\infty$ .

4. Étudier la position relative de $C_f$ et $C_g$.

### Partie B

On considère la fonction *G* définie sur *R* par $G(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt$.

1. Que représente *G* pour la fonction *g* ?

2. Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.

3. Étudier le sens de variations de *G* sur *R*.

On définit la fonction *F* sur ***R*** par : pour tout réel *x*, $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

4. Démontrer, que, pour tout réel *x*, $G(x)=\frac{1}{2}\left[F(x)-xe^{-x^2}\right]$ ; (on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de *G* et de $x\to\frac{1}{2}\left[F(x)-xe^{-x^2}\right]$.

On admet que la fonction *F* admet une limite finie *l* en $+\infty$ , et que cette limite *l* est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine A limité par la courbe $C_f$ et les demi-droites $[O\,;\vec{i})$ et $[O\,;\vec{j})$.

5. a. Démontrer que la fonction *G* admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

b. Interpréter en termes d'aires le réel $N=\int_0^1\left(1-t^2\right)e^{-t^2}\,dt$.

c. En admettant que la limite de *G* en $+\infty$ représente l'aire *P* en unités d'aire du domaine *D* limité par la demi-droite $[O\,;\vec{i})$ et la courbe $C_g$ justifier graphiquement que :

$$N=\int_0^1\left(1-t^2\right)e^{-t^2}\,dt\geq\frac{l}{2}$$

(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie).

**Document à rendre avec la copie - Annexe**