1. Exercice 4 (7 points)

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.

On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$.

1. Calculer I_1.

2. Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

.

4. Démontrer par récurrence que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.

5. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).

7. Justifier enfin que : $e^2 = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \ldots + \frac{2^n}{n!}\right)$.