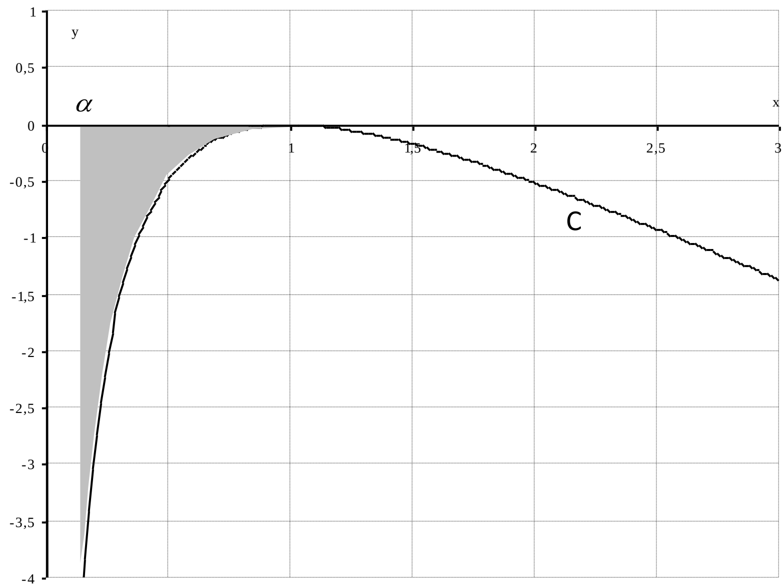
1. Exercice 1 (9 points)

La courbe C donné ci-dessous est la représentation graphique de la fonction *f* définie sur]0 ; $+\infty$ [par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x$.



1. a. Montrer que *f* est dérivable et que, pour tout *x* strictement positif, *f'*(*x*) est du signe de $N(x)=-\left[2\left(x\sqrt{x}-1\right)+\ln x\right]$.

b. Calculer *N*(1) et déterminer le signe de *N*(*x*) en distinguant les cas $0<x<1$ et $x>1$.

c. En déduire le sens de variation de *f* sur]0 ; $+\infty$ [et les coordonnées du point de C d'ordonnée maximale.

2. On note $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de]0 ; 1[.

a. Exprimer $A(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de [1 ; 2] et :

pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=\dfrac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1$.

a. Démontrer, pour tout réel *x* élément de [1 ; 2], la double inégalité : $0\le\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\le 1$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, u_n appartient à [1 ; 2].

4. En remarquant que, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note *l* sa limite.

b. Déterminer la valeur exacte de *l*.

Ts integrales feuille 20