1. Exercice 3 (8 points)

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur R par $\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1$.

1. a. Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Etudier le sens de variation de φ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle [1 ; +∞[qui sera notée α.

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur R et le présenter dans un tableau.

Partie B : Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Sur la feuille jointe sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions *f* et *g*. Ces fonctions sont définies par $f(x)=(2x+1)e^{-x}$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$. Ces courbes sont notées C_f et C_g.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées (0 ; 1) et admettent en ce point la même tangente.

2. a. Démontrer que pour tout réel *x*, $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée dans la partie A.

b. A l'aide d'un tableau étudier le signe de *f*(*x*) − *g*(*x*) sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire la position relative des courbes C_f et C_g.

3. a. Montrer que la fonction *h*, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(-2x-3)e^{-x}-\ln(x^2+x+1)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction *f* − *g*.

b. En déduire l'aire *S*, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=-\dfrac{1}{2}$ et $x=0$.

Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} près de cette aire.