1. Exercice 4 (5 points)

On considère la suite (I_n), $n \in \mathbb{N}$, définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt$.

1. a. Déterminer le sens de variation de cette suite.

b. Montrer que (I_n), est une suite positive.

c. Montrer que pour tout $t \in [0\,;1]$ on a $\frac{e^{-t^2}}{1+n+t} \le \frac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en conclure quant à la convergence de (I_n) ?

2. On considère f et g deux fonctions définies sur [0 ; 1] par : $f(x) = e^{-x} + x - 1$ et $g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$.

a. Étudier le sens de variation et le signe de f.

b. En déduire le sens de variation de g sur [0 ; 1].

c. Établir, pour tout x appartenant à [0 ; 1], l'encadrement : $1 - x \le e^{-x} \le 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

d. En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à [0 ; 1].

e. Établir l'encadrement : $\frac{2}{3(n+2)} \le I_n \le \frac{23}{30(n+1)}$.

f. Donner une valeur de p telle que $I_p \le 10^{-2}$.