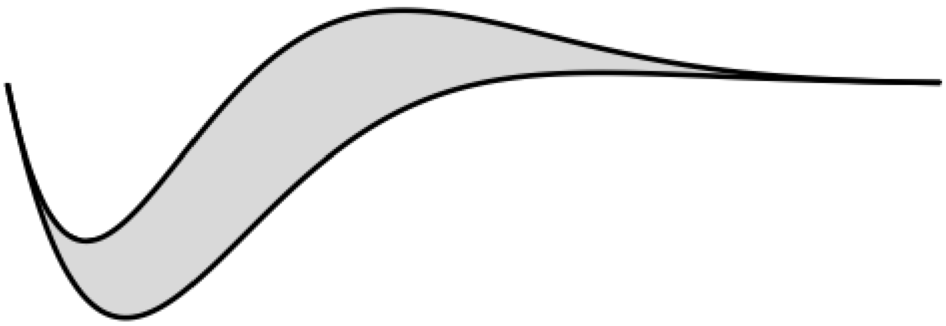
Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -e^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A — Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{-x}.$$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
   a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
   b. En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.

Partie B — Aire du logo

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbre $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)e^{-x}.$$
   On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
   On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
   a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.
   b. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2.