

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $h(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h .
 - a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$h(x) = e^{-x} - h'(x)$$

où h' désigne la fonction dérivée de h .

- - b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.
 - c. Dédire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1).$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

Ces deux courbes sont tracées en annexe page 8. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x ; f(x))$ et N le point de coordonnées $(x ; g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
 - a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.
 - b. Placer sur le graphique fourni en annexe page 8 les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN .
2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
 - a. Hachurer le domaine D_λ , correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe page 8.
- b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ , exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}.$$

- -
 - c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	λ est un réel positif S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :	Saisir S λ prend la valeur 0
Traitement :	Tant Que $1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda} < S$ faire λ prend la valeur $\lambda + 1$ Fin Tant Que
Sortie :	Afficher λ

- a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0,8$?
b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

