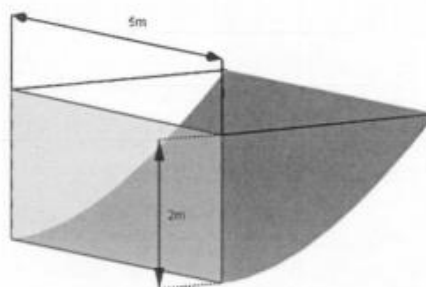


Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.

Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.



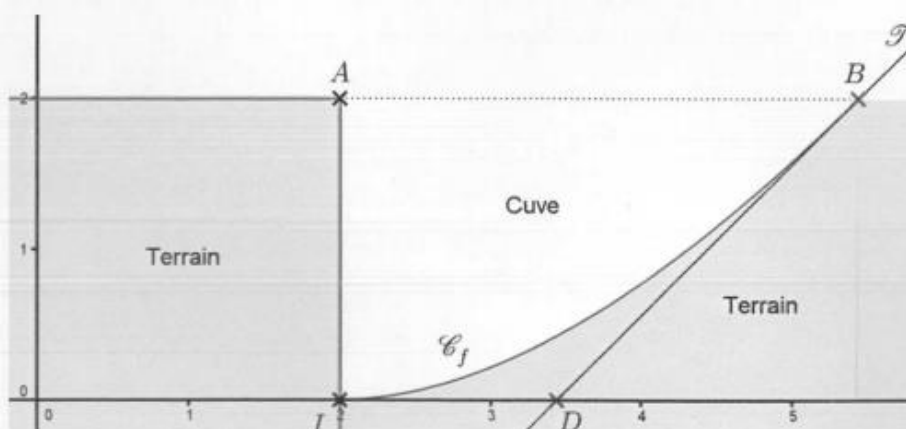
Cette cuve est schématisée ci-contre.

La partie incurvée est modélisée par la courbe  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[2; 2e]$  définie par :

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe  $\mathcal{C}_f$  est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 m et constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points  $A(2; 2)$ ,  $I(2; 0)$  et  $B(2e; 2)$ .



### Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points  $B$  et  $I$  appartiennent à la courbe  $\mathcal{C}_f$  et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $I$ .
2. On note  $\mathcal{T}$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $B$ , et  $D$  le point d'intersection de la droite  $\mathcal{T}$  avec l'axe des abscisses.
  - a) Déterminer une équation de la droite  $\mathcal{T}$  et en déduire les coordonnées de  $D$ .
  - b) On appelle  $S$  l'aire du domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , les droites d'équations  $y = 2$ ,  $x = 2$  et  $x = 2e$ .  $S$  peut être encadrée par l'aire du triangle  $ABI$  et celle du trapèze  $AIDB$ .  
Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

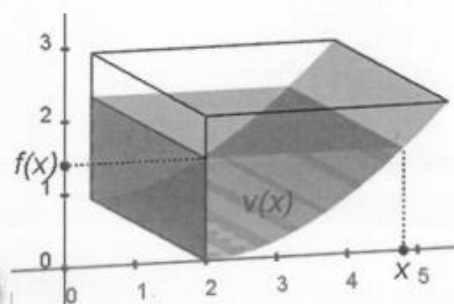
3. a) Montrer que, sur l'intervalle  $[2; 2e]$ , la fonction  $G$  définie par  $G(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$  est une primitive de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ .
- b) En déduire une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[2; 2e]$ .
- c) Déterminer la valeur exacte de l'aire  $S$  et en déduire une valeur approchée du volume  $V$  de la cuve au  $m^3$  près.

### Partie B

Pour tout réel  $x$  compris entre 2 et  $2e$ , on note  $v(x)$  le volume d'eau, exprimé en  $m^3$ , se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à  $f(x)$ .

On admet que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[2; 2e]$ ,

$$v(x) = 5 \left( \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3 \right).$$



1. Quel volume d'eau, au  $m^3$  près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?
2. On rappelle que  $V$  est le volume total de la cuve,  $f$  est la fonction définie en début d'exercice et  $v$  la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.  
Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

|                     |                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Variables :</b>  | $a$ est un réel<br>$b$ est un réel                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Traitement :</b> | $a$ prend la valeur 2<br>$b$ prend la valeur $2e$<br>Tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire :<br>  $c$ prend la valeur $(a + b)/2$<br>  Si $v(c) < V/2$ , alors :<br>    $a$ prend la valeur $c$<br>  Sinon<br>    $b$ prend la valeur $c$<br>  Fin Si<br>Fin Tant que |
| <b>Sortie :</b>     | Afficher $f(c)$                                                                                                                                                                                                                                                        |