On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} - 0,1.$$

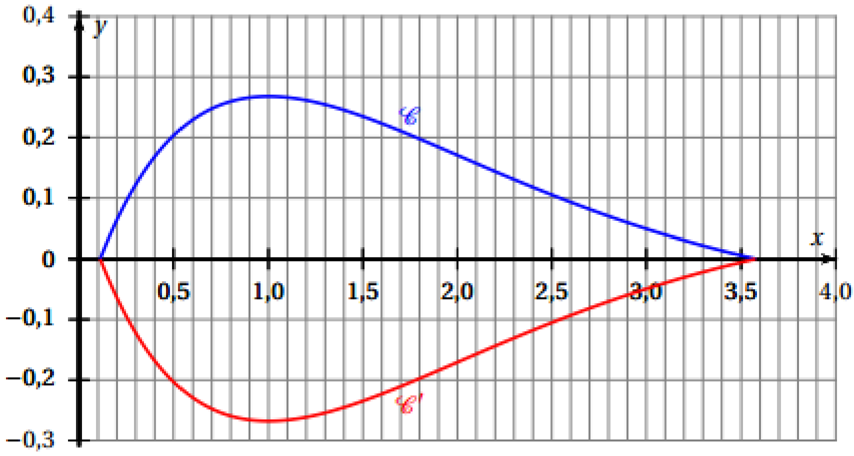
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathcal{C}'$ la courbe symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.

Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ par

$$F(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x} - 0,1x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$.

5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à $0,01$ près de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
On utilisera les valeurs arrondies à $0,001$ près suivantes : $\alpha \approx 0,112$ et $\beta \approx 3,577$.
6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.