

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
b) En déduire la valeur exacte de u_1 .
3. a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ... Affecter à u la valeur ... Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

- b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4. a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Démontrer que $\ell = 0$.